Les incertitudes en TP de physique de L1

Cette note s'adresse principalement aux enseignants et elle a pour but d'homogénéiser les recommandations à donner aux étudiants de L1 pour prendre en compte les incertitudes lors de l'exploitation des mesures qu'ils font en TP. Il est en effet très souhaitable de leur donner des indications cohérentes entre les diverses UEs afin qu'ils assimilent bien ces notions importantes.

Note rédigée par le Comité pédagogique du L1 de physique
O. Pluchery, P. Boissé, C. Schwob, S. Hameau,
C. Prigent, B. Sémelin, F. Daigne. **Mai 2015**

1) Problématique

Lorsque l'on cherche à mesurer une grandeur G, dont la valeur vraie est G_v, on va nécessairement obtenir une valeur un peu différente de G_v à cause des erreurs de mesure.

On peut distinguer 2 types d'erreurs (on omet ici les incertitudes systématiques - décalage de zéro etc - mais il faut bien sur en parler aux étudiants quand c'est judicieux):

1) celles liées à la **résolution limitée de l'instrument** (graduation d'une règle, dernier digit de l'affichage d'un multimètre à affichage numérique);

2) celles liées à la **non-répétabilité des mesures** (bruit, erreur liée au réflexe de l'opérateur, ...).

Le but est d'obtenir la meilleure estimation possible (G_{me}) et d'apprécier l'incertitude ΔG afin de définir un intervalle $[G_{me} - \Delta G\ ,\ G_{me} + \Delta G]$ dans lequel la valeur vraie G_v va "probablement" se trouver. Toute la question est d'estimer ΔG et la probabilité associée (degré de confiance) d'avoir G_v dans cet intervalle.

2) Estimation de ΔG et degré de confiance

Pour préciser le sens de "probablement", il faut connaitre la distribution statistique attendue pour les valeurs de G du fait de la non-répétabilité (c'est à dire celle qu'on obtiendrait si on répétait la mesure un grand nombre de fois). Cette distribution est généralement supposée *Gaussienne*. Dans ce cas, on peut prendre $\Delta G = \sigma(G)$, où $\sigma(G)$ est l'écart-type; la probabilité de trouver G_v dans l'intervalle $G_{me} \pm \Delta G$ ou "degré de confiance" est alors de 68%. Si l'on veut avoir un meilleur degré de confiance, on prendra $\Delta G = 2\sigma(G)$ (probabilité : 95%) ou $\Delta G = 3\sigma(G)$ (probabilité : 99,7%).

Une estimation grossière de l'incertitude liée à la résolution limitée de l'instrument est la moitié de la plus petite graduation δG, soit $\delta G/2$. Une meilleure valeur (au sens de l'écart-type) est $\delta G/\sqrt{12}$.

3) Présentation du résultat de la mesure avec son incertitude

Le résultat doit être présenté sous la forme :

$$G = G_{me} \pm \Delta G.$$

L'incertitude est souvent difficile à évaluer ; elle ne sera jamais connue avec plus de 2 chiffres significatifs. Les chiffres indiqués pour la valeur de G_{me} doivent être cohérents avec l'estimation de ΔG.

Par exemple : L = 23,4 ± 2,5 cm est correct. Au contraire : L = 23,4321 ± 2,5 cm ne l'est pas; même si l'opération effectuée par la calculette pour obtenir G_{me} est correcte, les chiffres finaux 321 n'ont pas de sens compte tenu de la précision. Par ailleurs, dans le résultat L = 15 ± 0,1 cm, il manque un chiffre pour la valeur de G_{me}. Si on sait que c'est un zéro, il faut l'écrire : L = 15,0 ± 0,1 cm est alors cohérent (pour le physicien expérimentateur, 15 et 15,0 n'ont pas le même sens).

4) Propagation des incertitudes

4.1) Cas où G de dépend que d'une seule grandeur. Parfois, la grandeur considérée G n'est pas directement accessible mais est une fonction de la grandeur g qui est mesurable (par ex. $V = c^3$ pour le volume d'un cube de côté c).

- Si G et g sont liés par une relation affine : $G = a.g + b$ (a et b : constantes connues) alors $\Delta G = |a| \Delta g$.
- Si G est une fonction quelconque $f(g)$ de g alors $\Delta G = \frac{df}{dg}\Delta g$ (se déduit par linéarisation de f).

4.2) Cas où G dépend de plusieurs grandeurs, g_1, g_2 ...

Souvent une grandeur G est déduite de la mesure de plusieurs autres grandeurs, g_1, g_2 ...., chacune possédant son incertitude Δg_1 , Δg_2 ... . Il faut alors déduire ΔG des ΔG_i .

- Si $G = g_1 + g_2$ alors $(\Delta G)^2 = (\Delta g_1)^2 + (\Delta g_2)^2$ et $\Delta G = \sqrt{(\Delta g_1)^2 + (\Delta g_2)^2}$. Les incertitudes se combinent *quadratiquement* (si on prenait $\Delta g_1 + \Delta g_2$ on surestimerait ΔG car en moyenne, il est peu probable que les erreurs sur g_1 et g_2 soient de même signe). Cette relation est également valable pour la somme de N grandeurs.
- Si l'on évalue la moyenne notée $< G >$, sur N mesures de G alors $\Delta(< G >) = \Delta G / \sqrt{N}$.
- Si $G = g_1 - g_3$ alors $(\Delta G)^2 = (\Delta g_1)^2 + (\Delta g_3)^2$ (cf 4.1 en prenant $g_2 = - g_3$).
- Si $G = g_1 \ . \ g_2$ ou également $G = \frac{g_1}{g_2}$ alors $\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 = \left(\frac{\Delta g_1}{g_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g_2}{g_2}\right)^2$. Dans ce cas, ce sont les incertitudes *relatives* qui s'ajoutent quadratiquement.
- Si $G = g_1^{\alpha} . \ g_2^{\beta}$ --> $\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 = \left(\alpha\frac{\Delta g_1}{g_1}\right)^2 + \left(\beta\frac{\Delta g_2}{g_2}\right)^2$ (cette relation contient la précédente).
- Si $G = f(g_1 , g_2)$ --> $(\Delta G)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial g_1}\Delta g_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial g_2}\Delta g_2\right)^2$ (qui s'étend au cas de N Variables)

5) Quelques remarques.

5.1) terme dominant et valeur approchée de l'incertitude : dans les relations ci-dessus, le fait que les incertitudes se combinent *quadratiquement* implique que si l'une d'entre elles est dominante, les autres termes deviennent rapidement négligeables. On pourra alors garder seulement le terme dominant (si $\Delta G_2 \approx 3 \ \Delta G_1$, alors $\Delta G \approx \Delta G_2$ car $\Delta G_2^2 \approx 9 \ \Delta G_1^2$).

5.2) faut-il faire un calcul d'erreur dans tous les cas ?

Il est souvent délicat d'apprécier les incertitudes et fastidieux de prendre en compte leur propagation si on manipule des expressions complexes contenant plusieurs grandeurs. Aussi, on n'exigera pas des étudiants de mener un calcul d'erreur dans tous les cas; cela prendrait un temps important, au détriment des mesures et cela donnerait aux étudiants une image très négative des TPs. On pourra faire une analyse détaillée seulement dans les cas où cela est abordable et particulièrement pertinent. En revanche, si on ne fait pas de calcul d'erreur complet, il est important d'identifier les sources d'incertitude et d'avoir une idée approximative de leur valeur. De manière générale, on essaiera de faire en sorte que les étudiants soient toujours conscients de l'ordre de grandeur de l'incertitude relative associée aux résultats finaux qu'ils obtiennent, $\Delta G/G$. Dans les TPs de L1, on atteindra rarement une précision meilleure que 1%. Des valeurs de quelques % à 10% sont souvent réalistes. Pour un bilan d'énergie cinétique lors d'un choc, il est possible d'arriver à des valeurs aussi élevées que $\Delta E_c / E_c \approx 20\%$ (la vitesse intervenant au carré).